-EXERCICE 12.1-

• ENONCE :

« Particule soumise à un potentiel parabolisable »

• On considère un point matériel de masse m, soumis à une force dérivant d'un potentiel à une dimension $E_P(x)$, présentant un extremum en $x = x_0$; on suppose que ce potentiel est « parabolisable », c'est-à-dire que $\frac{d^2E_P(x)}{dx^2} \neq 0$.

• En l'absence d'amortissement, étudier le mouvement de la particule pour une petite perturbation par rapport à la position d'équilibre.

• <u>CORRIGE</u> :

« Particule soumise à un potentiel parabolisable »

• Pour une perturbation « suffisamment petite », donnons un développement limité de l'énergie potentielle au voisinage de la position d'équilibre x_0, et ceci au second ordre :

$$E_P(x)=E_P(x_0)+(x-x_0)\times\left.\frac{dE_P(x)}{dx}\right|_{x=x_0}+\frac{(x-x_0)^2}{2}\times\left.\frac{d^2E_P(x)}{dx^2}\right|_{x=x_0}+(x-x_0)^2\times\varepsilon(x-x_0),$$

avec $\varepsilon(x-x_0)\to 0$, pour $x\to x_0$.

• La position $x=x_0$ étant un extremum, on a : $\left.\frac{dE_P(x)}{dx}\right|_{x=x_0}=0$; posons $X=x-x_0$ et $\left.\frac{d^2E_P(x)}{dx^2}\right|_{x=x_0}=k$ $\Rightarrow$ il vient : $E_P(X)\simeq E_P(0)+\frac{1}{2}kX^2$ $\Rightarrow$ le PFD appliqué à la particule fournit :

$$m\frac{d^2X(t)}{dt^2}\vec{e}_x=-\overrightarrow{grad}E_P(X)=-\frac{dE_P(X)}{dX}\vec{e}_x \;\Rightarrow\; m\frac{d^2X(t)}{dt^2}=-kX(t) \text{ ou : } \boxed{\frac{d^2X(t)}{dt^2}+\frac{k}{m}\times X(t)=0}$$

♦ si x_0 est un **minimum** (« puits de potentiel ») : $k=\left.\frac{d^2E_P(x)}{dx^2}\right|_{x=x_0}\succ 0$ $\Rightarrow$ on peut poser $\omega_0^2=\frac{k}{m}$, et le mouvement de la particule sera des **oscillations harmoniques** de pulsation ω_0 (solutions compatibles avec le caractère **stable** de l'équilibre).

♦ si x_0 est un **maximum** (« sommet de potentiel ») : $k=\left.\frac{d^2E_P(x)}{dx^2}\right|_{x=x_0}\prec 0$ $\Rightarrow$ les solutions de l'équation différentielle seront une combinaison linéaire d' **exponentielles réelles**, dont l'une **divergera** avec le temps (solutions compatibles avec le caractère **instable** de l'équilibre).